Олимпиада по информатике
Витус Беринг — 2019

Задача 1 *(2 балла)*

В зоомагазине новых хозяев ожидают N котят. Ваня знает, что X из них имеют голубые глаза, Y — полосочки, Z — белые носочки на лапках. При этом каждый котенок из магазина обладает хотя бы одной чертой из списка. Ваня хочет полосатого, голубоглазого котенка с белыми носочкам. Для заданных значений N, X, Y, Z определите, какое минимальное и максимальное количество котят из магазина может подходить под Ванины требования.

a) $N = 10$, $X = 5$, $Y = 4$, $Z = 10$.

b) $N = 10$, $X = 7$, $Y = 5$, $Z = 10$.

c) $N = 20$, $X = 15$, $Y = 18$, $Z = 10$.

d) $N = 30$, $X = 6$, $Y = 18$, $Z = 21$.

Решение задачи 1

В условии сказано, что «каждый котенок из магазина обладает хотя бы одной чертой из списка», следовательно, объединение $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$ должно совпадать с множеством всех котят $\mathbf{N}$. Минимальное количество котят определяем для случая наименьшей мощности множества $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$ (худший случай), а максимальное — для случая наибольшей мощности множества $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$ (лучший случай).

a) Так как $\mathbf{N} = \mathbf{Z}$, то все котята в магазине имеют белые носочки на лапках. Так как $X + Y < N$, то в худшем случае 0 котят подойдут под Ванины требования, а в лучшем — множество $\mathbf{X}$ включает в себя $\mathbf{Y}$, и тогда 4 котенка подойдут под Ванины требования.
Ответ: 0 и 4.

b) Так как $\mathbf{N} = \mathbf{Z}$, а $X + Y > N$, то в худшем случае мощность множества $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ составит 2 котенка ($|\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}| = X + Y - N = 2$). В лучшем случае множество $\mathbf{X}$ включает в себя $\mathbf{Y}$, и тогда 5 котят подойдут под Ванины требования.
Ответ: 2 и 5.

c) Наименьшее пересечение $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$ получается, когда объединение двух самых больших множеств ($\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$) совпадает с множеством $\mathbf{N}$, а третье множество ($\mathbf{Z}$) максимально пересекается с множествами **X-Y** и **Y-X**, то есть

$$|\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}| = XY = X + Y - N,$$

$$|\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}|_{\min} = \max(Z - (X - XY + Y - XY), 0).$$

Наибольшее пересечение $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}$ получается, когда объединение двух самых больших множеств ($\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$) совпадает с множеством $\mathbf{N}$, а третье множество ($\mathbf{Z}$) максимально пересекается с множеством $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, то есть

$$|\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}|_{\max} = \min(Z, XY).$$

Ответ: 3 и 10.

d) Решается аналогично c).
   Ответ: 0 и 6.

Задача 2 *(2 балла)*

На любом языке программирования запишите условие, которое является истинным, когда точка с координатами (x, y) лежит внутри изображенного на рисунке 1 треугольника (в том числе и на его границах). Укажите, на каком языке программирования написано условие.

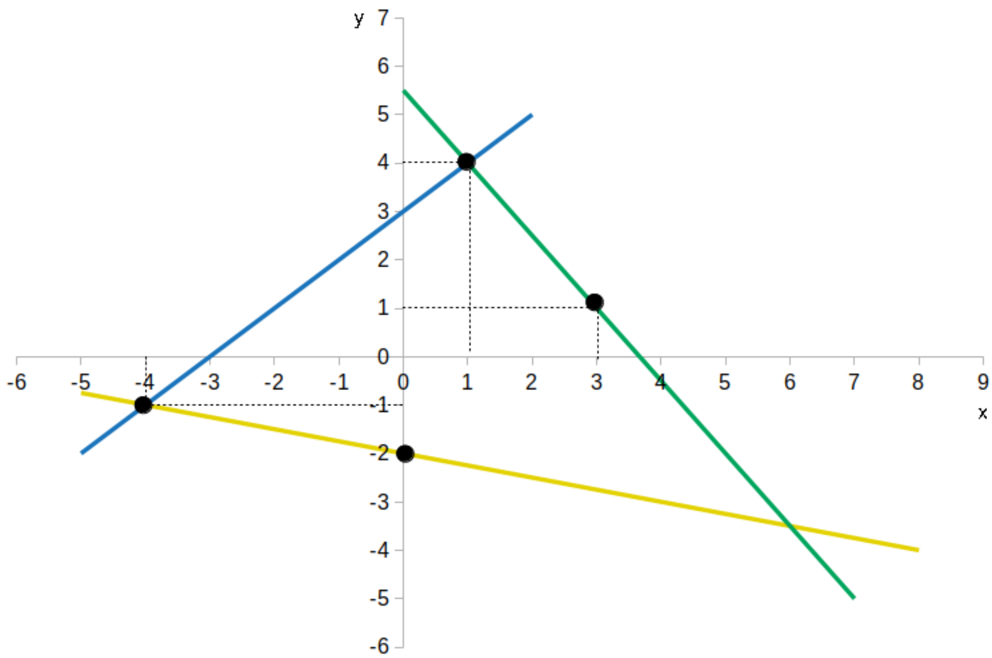

Рис. 1: Треугольник

Решение задачи 2

Для того чтобы сформулировать условие, необходимо записать уравнение для каждой прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет вид

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

Синяя прямая проходит через две точки $(-4, -1)$ и $(1, 4)$, тогда ее уравнение

$$y = x + 3.$$

Зеленая прямая проходит через две точки $(1, 4)$ и $(3, 1)$, тогда ее уравнение

$$y = -1.5x + 5.5.$$

Желтая прямая проходит через две точки $(-4, -1)$ и $(0, -2)$, тогда ее уравнение

$$y = -0.25x - 2.$$

Ответ. Условие на C++:

```
y <= x+3 && y <= -1.5*x+5.5 && y >= -0.25*x-2
```

Задача 3 *(2 балла)*

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(5k + 9m > 121) \vee ((k - 13 \leq A) \wedge (m + 12 < A))$$

тождественно истинно при любых натуральных k и m.

Решение задачи 3

A влияет на результат логического выражения в случае, если

$$5k + 9m \leq 121.$$

Так как по условию задачи k и m — натуральные числа, то областью определения переменных k и m в рассматриваемом случае является треугольник, ограниченный прямыми (все границы включены)

$$k = 1,$$

$$m = 1,$$

$$k = \frac{121}{5} - \frac{9}{5}m.$$

Одновременное выполнение условий $k - 13 \leq A, \quad m + 12 < A$ означает, что треугольник находится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми (параллельная оси Ok граница не включена, рисунок 2)

$$k = 1,$$

$$m = 1,$$

$$k = A + 13.$$

$$m = A - 12.$$

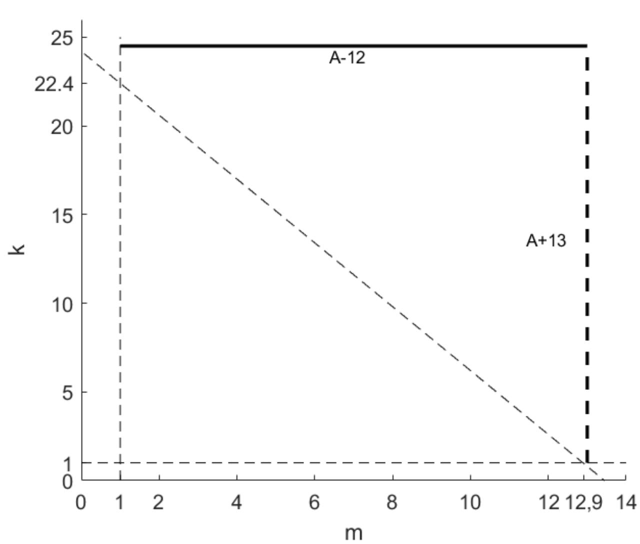

Рис. 2: Значения m и k

Найдем точки пересечения прямой $k = \dfrac{121}{5} - \dfrac{9}{5}m$ с прямыми $k = 1$ и $m = 1$. Это точки $m = 1,\ k = 22.4$ и $m \approx 12.9,\ k = 1$. Тогда

$$A + 13 \geq 22,$$
$$A - 12 > 12.$$

Так как условия должны выполняться одновременно, получаем $A > 24$, следовательно, $A_{\min} = 25$.

Ответ. 25.

Задача 4 *(3 балла)*

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$((x_1 \to y_1) \to x_2) \to y_2 = 0$$
$$((x_2 \to y_2) \to x_3) \to y_3 = 0$$
$$((x_3 \to y_3) \to x_4) \to y_4 = 0$$
$$((x_4 \to y_4) \to x_5) \to y_5 = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_5$ и $y_1, y_2, \ldots, y_5$ — логические переменные. Не нужно перечислять все наборы значений переменных, при которых выполняются данные равенства. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение задачи 4

Импликация ложна в единственном случае ($1 \to 0 = 0$), следовательно, $y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 0$. Получаем новую систему логических уравнений

$$x_1 \wedge \bar{y_1} \vee x_2 = 1$$
$$x_2 \vee x_3 = 1$$
$$x_3 \vee x_4 = 1$$
$$x_4 \vee x_5 = 1$$

Рассмотрим уравнения 2-4. Для переменных x_2, x_3, x_4, x_5 получим следующие решения

x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Теперь рассмотрим возможные варианты для переменных x_1 и y_1. Если $x_2 = 0$, то $x_1 \wedge \bar{y_1} = 1$, получаем один вариант $x_1 = 1$ и $y_1 = 0$. Если же $x_2 = 1$, то $x_1 \wedge \bar{y_1}$ может быть любое, следовательно 4 варианта. Согласно таблице в трех случаях $x_2 = 0$, тогда получаем 3 решения с $x_2 = 0$, и в пяти случаях $x_2 = 1$ — получаем 20 решений с $x_2 = 1$. Итого 23 решения.

Ответ. 23.

Задача 5 *(2 балла)*

Определите, какое число будет выведено в результате выполнения следующего алгоритма. Для удобства код представлен на трех языках программирования.

```
//C++
#include <iostream>

using namespace std;
int Func(int x){
  if (x-4<0)
    return 6-x;
  else
    return x-2;
}

int main(int argc, char **argv){
  int b=-1, e=9;
  int K = b/2;
  int N = Func(b);
  for (int t=b; t<=e; t++)
    if (Func(t) >= N){
      N = Func(t);
      K = t/2;
    }
        cout << N-K;
        return 0;
}
```

```
{Pascal}
var
  t,b,e,K,N: integer;

function Func(x: integer): integer;
begin
  if x-4<0 then
    Func:=6-x
  else
    Func:=x-2;
end;

begin
  b:=-1;
  e:=9;
  K:=b div 2;
  N:=Func(b);
  for t:=b to e do begin
    if Func(t) >= N then begin
      N := Func(t);
      K := t div 2;
    end;
  end;
  writeln(N-K);
end.
```

```
# Python 3.x
def Func(x):
  if x-4<0:
    return 6-x
  else:
    return x-2

b=-1
e=9
K=b//2
N=Func(b)
for t in range(b,e+1):
  if Func(t)>=N:
    N=Func(t)
    K=t//2
print(N-K)
```

Решение задачи 5

Подпрограмма Func вычисляет функцию $f(x) = |x - 4| + 2$ для целых значений x. В самой программе определяется максимальное значение $f(x)$ на отрезке $x \in [-1; 9]$. Так как неравенство нестрогое (Func(t)>=N), то если $f(x)$ на отрезке $[-1; 9]$ принимает максимальное значение несколько раз, в переменную N сохраняется последнее из значений. Одновременно с N определяется целая часть от деления на 2 абсциссы найденного максимального значения и сохраняется в переменную K. На экран выводится $N - K$. Построим график $f(x)$, определим N и K и результат работы программы (рисунок 3).

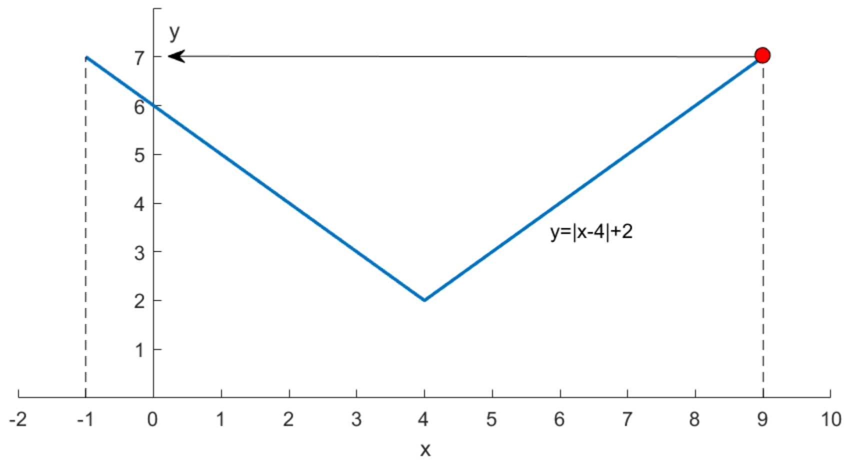

Рис. 3: Треугольник

$N = 7$, $K = 9 \div 2 = 4$, $N - K = 3$.
Ответ: 3.

Задача 6 *(5 баллов)*

На клеточном поле $N \times M$ расположены две жесткие детали A и B. Деталь A накрывает в каждой строке клеточного поля несколько (не ноль) первых клеток, деталь B — несколько (не ноль) последних; каждая клетка поля либо накрыта одной из деталей, либо пуста. Деталь B начинают сдвигать влево, не поворачивая, пока она не упрется в A хотя бы одной клеткой. Определите, на сколько клеток будет сдвинута деталь B.

Входные данные. В первой строке вводятся два числа N и M — число строк и столбцов соответственно ($1 \leq N, M \leq 100, N \times M > 1$). Далее следуют N строк, задающих расположение деталей. В каждой находится ровно M символов “A” (клетка, накрытая деталью A), “B” (накрытая деталью B) или “.” (свободная клетка).

Пример входных данных

```
4 6
AA.BBB
A....B
AAA..B
A..BBB
```

Выходные данные. Одно число — ответ на задачу.

Решение задачи 6

Для решения задачи достаточно подсчитать минимальное число точек по строкам клеточного поля. Отметим, что нет необходимости сохранять вводимые данные в двумерном массиве, то есть объем памяти программы не зависит от входных данных.

Пример решения задачи на языке программирования Python.

```
size = list(map(int, input().split()))
min = size[1]
for i in range(size[0]):
    m = input().count('.')
    if m < min:
        min = m
print(min)
```

Задача 7 *(5 баллов)*

Напишите программу, которая определяет последнюю цифру, на которую оканчивается число A^B.

Входные данные. Два числа A и B ($1 \le A, B \le 10000$).

Выходные данные. Одно число — цифра на которую оканчивается число A^B.

Решение задачи 7

Оптимальный алгоритм решения основан на правиле, что последняя цифра степени любого натурального числа будет повторяться каждые четыре шага, то есть $n^k = n^{k+4m}$, где n, m, k — натуральные числа. Таким образом вместо вычисления степени (самого числа или последней цифры) достаточно составить табличку для четырех последних цифр. Время выполнения программы не зависит от входных данных.

Пример решения задачи на языке программирования Python.

```
A = int(input())
B = int(input())

digits = []
for i in range(1, 5):
    digits.append((A ** i) % 10)

print(digits[(B - 1) % 4])
```