

Олимпиада по информатике

Витус Беринг — 2017

Разбор заданий

1. Некоторое число X переводили из десятичной в двоичную, четверичную, восьмиричную и шестнадцатеричную системы счисления. При переводе часть цифр была потеряна. Определите, возможно ли по оставшимся цифрам восстановить исходное число X , если да, то восстановите, ответ запишите в десятичной системе счисления.

$$X_{10} = B*_{16} = *7*_{8} = ***1_4 = *****1**_2$$

Решение. Как известно, перевод чисел из двоичной системы счисления в систему счисления с основанием, равным степени двойки, $p = 2^k$, выполняется по следующему правилу: в двоичной системе счисления число разбивается на группы из k цифр, начиная с конца числа, далее каждая группа переводится в десятичную систему счисления. Согласно данному правилу X можно представить следующим образом.

p	7	6	5	4	3	2	1	0
2	*	*	*	*	*	1	*	*
4	*		*		*		1	
8	*		7			*		
16	B				*			

Тогда по 3й строке таблицы можно восстановить последние 2 цифры в двоичной записи, по 4й – цифры в разрядах 3,4,5, по 5й – цифры в разрядах 6,7. Получим

p	7	6	5	4	3	2	1	0
2	1	0	1	1	1	1	0	1
4	*		*		*		1	
8	*		7			*		
16	B				*			

$$10111101_2 = 189_{10}$$

Ответ. 189.

2. Значение арифметического выражения:

$$5 \cdot 36^9 + 2 \cdot 6^{20} - 38$$

записали в системе счисления с основанием 6. Сколько цифр «5» содержится в этой записи?

Решение. Рассмотрим каждое слагаемое отдельно

$$X = 5 \cdot 36^9 = 5 \cdot 6^{18} = \underbrace{5000\dots000}_{18}$$

$$Y = 2 \cdot 6^{20} = \underbrace{2000\dots000}_{20} = 200 \underbrace{000\dots000}_{18}$$

$$X + Y = \underbrace{205000\dots000}_{18}$$

$$Z = 38 = 6^2 + 2 \cdot 6^0 = 102_6$$

$$X + Y - Z = \underbrace{205000\dots000}_{15}000 - 102 = 204 \underbrace{555\dots555}_{15}454$$

Ответ. 16.

3. Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы «ВЕСНА», причём буква «Е» используется в каждом слове не более 3 раз (1,2 или 3 раза) и может встретиться только на 1, 2, и/или 5 позиции. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение. Рассмотрим все варианты расположения буквы «Е».

«Е» встречается 1 раз «E****», «*E***», «****E» – на позиции обозначенные «*» может претендовать любая из 4х букв «ВСНА», следовательно, для данного случая получаем $3 \cdot 4^4 = 768$ слов.

«Е» встречается 2 раза «EE***», «E***E», «*E**E» – на позиции обозначенные «*» может претендовать любая из 4х букв «ВСНА», следовательно, для данного случая получаем $3 \cdot 4^3 = 192$ слова.

«Е» встречается 3 раза «EE**E» – на позиции обозначенные «*» может претендовать любая из 4х букв «ВСНА», следовательно, для данного случая получаем $4^2 = 16$ слов.

Всего $768 + 192 + 16 = 976$.

Ответ. 976.

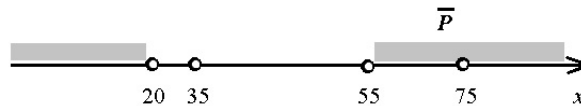
4. На числовой прямой даны два отрезка $P = [20, 55]$, $Q = [35, 75]$. Выберите такой отрезок A , что обе приведённые ниже формулы истинны при любом значении переменной x

$$(x \notin A) \rightarrow (x \notin P)$$

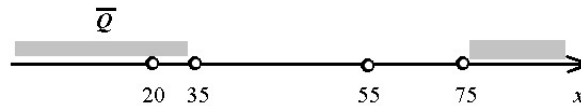
$$(x \in Q) \rightarrow (x \in A)$$

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет меньшую длину.

Решение. Введем обозначения $Y = x \in Y$, $\bar{Y} = x \notin Y$. Рассмотрим первое условие $\bar{A} \rightarrow \bar{P} = A + \bar{P} = 1$. Т.е. $\bar{P} = (-\infty, 20) \cup (55, \infty)$ в объединении с A покрывает всю числовую прямую, согласно рисунку минимальное $A = [20, 55]$.



Рассмотрим второе условие $Q \rightarrow A = \bar{Q} + A = 1$. Т.е. $\bar{Q} = (-\infty, 35) \cup (75, \infty)$ в объединении с A покрывает всю числовую прямую, согласно рисунку минимальное $A = [35, 75]$.



Т.к. оба условия должны выполняться одновременно минимальное $A = [20, 55] \cup [35, 75] = [20, 75]$, что обеспечивает покрытие всей числовой оси и в первом, и во втором случае.

Ответ. $[20, 75]$.

5. Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_2 \equiv x_3) = 1 \\ (x_2 \equiv x_3) \rightarrow (x_3 \equiv x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_5 \equiv x_6) \rightarrow (x_6 \equiv x_7) = 1 \end{cases}$$

где x_1, x_2, \dots, x_7 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение. Построим таблицу истинности для первого уравнения $(x_1 \equiv x_2) \rightarrow (x_2 \equiv x_3) = 1$

x_1	x_2	x_3	F_1
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Получается, для уравнения от 3х логических переменных a, b, c вида $(a \equiv b) \rightarrow (b \equiv c) = 1$ решениями будут следующие тройки $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$.

Подключим переменную x_4 , для этого нужно определить, какие значения может принимать x_4 (согласно описанию выигрышных троек) для решений первого уравнения

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	1	0	0 или 1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0 или 1
1	1	1	1

Видно, что подключение x_4 вызывает увеличение числа решений на 2 за счет решений, в которых последние две переменные имеют различные решения. Поскольку в новых 8 решениях в двух решения $(0, 1, 0), (1, 0, 1)$ последние две переменные имеют различные решения, то при подключении переменной x_5 , также произойдет увеличение числа решений на 2. По индукции для 7 переменных получим $6 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$ решений.

Ответ. 14.

6. Количество цветов, которые может воспроизводить видеоадаптер, определяется количеством бит, отводимых в видеопамати персонального компьютера для описания одной точки. Например, 2 бита позволяют воспроизводить 4 цвета, 4 бита - 16 цветов и т.д. Видеопамать содержит информацию о цвете каждой точки экрана. Написать программу, определяющую, может ли картинка на экране монитора с разрешающей способностью видеоадаптера $x \times y$ содержать 2048 цвета, если видеопамать – 4 Мб.

Решение. Для вычисления информационного объема изображения, состоящего из пикселей, используется формула

$$V = x \cdot y \cdot I,$$

где $x \times y$ – размер изображения в пикселях, I – глубина кодирования или сколько бит весит один цвет (пиксель). Т.к. согласно заданию имеется палитра из $2048 = 2^{11}$ цветов, то $I = 11$, x, y вводит пользователь, следовательно, можно определить объем V и сравнить его с 4 Мб.

Ответ. Пример решения задачи на языке Pascal

```

program Picture;
var
  x, y, I, V: integer;
begin
  readln(x, y);
  I := 11;

  V := x*y*I;
  if V <= 4*1024*1024*8 then
    writeln('может')
  else
    writeln('не может');
end.

```

7. Известна цена ноутбука Lenovo в январе 2017 г. и январе 2018 г. Написать программу, отвечающую на вопрос, произошло ли удешевление или нет и на сколько процентов изменилась цена изделия (в большую или меньшую сторону).

Решение. Пусть цена ноутбука в 2017 г. x , а в 2018 г. – y . Определить произошло ли удешевление, можно сравнив x и y между собой. Определить на сколько процентов изменилась цена можно с помощью формулы

$$d = \left| 100 - \frac{y}{x} \cdot 100 \right|.$$

Ответ. Пример решения задачи на языке Pascal

```

program Cost;
var
  x,y,d: double;
begin
  readln(x,y);
  if y<x then
    writeln('Удешевление произошло');
    d := abs( 100 - y/x * 100 );
    writeln('Цена изменилась на ', d, '%');
end.

```

8. Треугольник на плоскости задается целочисленными координатами вершин $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Для заданной точки $Z(x, y)$ определить, принадлежит ли она какой-нибудь из сторон треугольника ABC или нет.

Решение. Принадлежность точки стороне проверяется следующим образом, если концевые точки стороны $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то, если точка $Z(x, y)$ принадлежит стороне, то должно существовать такое число $p, 0 \leq p \leq 1$, что

$$x = p \cdot x_1 + (1 - p) \cdot x_2,$$

$$y = p \cdot y_1 + (1 - p) \cdot y_2,$$

$$p = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}.$$

Таким образом необходимо проверить принадлежность каждой из трех сторон.

Ответ. Пример решения задачи на языке Pascal

```

program Treangle;
var
  x1,y1,x2,y2,x3,y3,x,y: double;
begin
  readln(x1,y1);
  readln(x2,y2);
  readln(x3,y3);

  readln(x,y);

  if ((x-x2)/(x1-x2) = (y-y2)/(y1-y2)) and
    ((x-x2)/(x1-x2) >= 0) and
    ((x-x2)/(x1-x2) <= 1)then
    writeln('Z принадлежит AB')
  else if (x-x3)/(x1-x3) = (y-y3)/(y1-y3) and
    ((x-x3)/(x1-x3) >= 0) and
    ((x-x3)/(x1-x3) <= 1) then
    writeln('Z принадлежит AC')
  else if (x-x3)/(x2-x3) = (y-y3)/(y2-y3) and
    ((x-x3)/(x2-x3) >= 0) and
    ((x-x3)/(x2-x3) <= 1) then
    writeln('Z принадлежит BC')
  else writeln('Z не принадлежит ни одной из сторон');
end.

```