Задания олимпиады по математике и физике

09 декабря 2017 года 10.00-13.00

- (7 баллов) Имеется много одинаковых правильных треугольников, в вершинах которых расставлены числа 1, 2, 3. Треугольники сложили в стопку, и нашли сумму чисел, находящихся в каждом углу стопки. а) Может ли случиться, что в каждом углу стопки сумма равна 2017? б) Может ли случиться, что в каждом углу стопки сумма равна 2020?
- (7 баллов) Даны 3 подряд идущих натуральных числа $a$, $a+1$, $a+2$. Найти все такие натуральные числа $b$, $b+1$, $b+2$, чтобы $b$ делилось на $a$, $b+1$ делилось на $a+1$, $b+2$ делилось на $a+2$.
- (7 баллов) Петя прогуливался недалеко от Останкинской башни. По навигатору он обнаружил, что находится на расстоянии 540 метров. Также он смог определить, что видит вершину под углом 46 градусов. Превышает ли высота башни 558 метров? (собственным ростом Пети пренебречь)
- (7 баллов) Школьница Катя проводит эксперимент. Она наполняет кружку воды объемом 400 мл при температуре $+20^\circ\ C$ до краев. Затем отпивает 1 глоток объемом 10 мл. Аккуратно доливает до исходного объема кипяток. Перемешивает пластиковой трубочкой. Затем повторяет процедуру много раз. Максимальная температура воды, которую она может выпить не обжигаясь, равна $+60^\circ\ C$. Сколько воды выпьет Катя до конца эксперимента? (Замечание. $\ln(2) \approx 0.693$.)
- (7 баллов) Вратарь отбил мяч на расстояние 18 метров от ворот, при этом мяч находился в воздухе 3 с. Какое максимальное расстояние может пролететь мяч при той же самой силе удара? (g=10 м/с$^2$)
- (7 баллов) Два металлических шарика подвешены в одной точке на нитях длиной 30 см. Каждому шару сообщили заряд 40 нКл. Нити отклонились от вертикали на 45 градусов. Определите массу каждого из шариков в миллиграммах. (g=10 м/с$^2$, коэффициент пропорциональности в законе Кулона принять равным $9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$).
- (7 баллов) Две одинаковые по размерам книжки соединили так, что листы книжек переложены через один и при этом половина площади каждой страницы соприкасается с соответствующей половиной страницы другой книги. Корешки книг параллельны друг другу. К корешкам присоединены длинные стороны листов, имеющих размеры L x D = 15 см x 22 см. Толщина каждого листа d = 0,1 мм. Коэффициент трения листов бумаги друг о друга $\mu$ = 0,3. При каком количестве листов в книгах их не удастся разъять, прикладывая к корешкам силы, направленные в противоположные стороны?

Решение задач.

- Обозначим вершины стопки A, B, C, а суммы, полученные в каждом из углов, – S. Возможны следующие варианты расстановки цифр в вершинах A, B, C:

  а) 1-2-3; б) 2-1-3; в) 3-2-1; г) 1-3-2; д) 2-3-1; е) 3-1-2.

  Суммы в вершинах будут одинаковыми, если взять одинаковое количество треугольников типов:

  1. а), б), в). Пусть количество треугольников каждого типа равно $N$. Тогда сумма $S = (1 + 2 + 3)N = 6N$

  2. или г), д), е). Пусть количество треугольников каждого типа равно $M$. Тогда сумма $S = (1 + 2 + 3)M = 6M$

  3. или а) и в). Пусть количество треугольников каждого типа равно $K$. Тогда сумма $S = (1 + 3)K = (2 + 2)K = 4K$

  4. или б) и д). Пусть количество треугольников каждого типа равно $K$. Тогда сумма $S = 4L$

  5. или г) и е). Пусть количество треугольников каждого типа равно $K$. Тогда сумма $S = 4I$

  Других вариантов расположения треугольников из соображений симметрии не существует.

  В стопке возможны различные комбинации пяти вышеуказанных вариантов. Если в стопке только треугольники комбинаций 1 или 2, то сумма $S$ должна делиться на 6. Если только треугольники комбинаций 3, 4 или 5, то сумма $S$ должна делиться на 4. Если же в стопке есть треугольники комбинаций 1 или 2 и комбинаций 3, 4 или 5, то сумма $S$ должна делиться на 2.

  Тогда ответ на вопрос о том, может ли сумма быть равна 2017 в каждой вершине, является отрицательным во всех трёх вариантах, так как 2017 не делится нацело на 2, 4 или 6. Число 2020 делится нацело на 4, но не делится нацело на 6.

  Таким образом, получаем, что комбинации 3, 4, 5 реализуют 2020. В этом случае сумма в каждой вершине $S = 4I + 4K + 4L = 2020$, т.е. $I + K + L = 505$. Например, по 300 треугольников а) и в); по 200 треугольников типа б) и д); по 5 треугольников - г) и е), или по 505 треугольников типов а) и в), а остальных 0.

  Ответ: а) нет, не может б) да, может.

- Поскольку $b$ делится на $a$, то ясно, что $b \geq a$. Тогда наименьшее значение $b$, удовлетворяющее условию задачи – это $b = a$. Переход к следующему подходящему значению $b$ будет иметь вид $b = a + s$, где $s$ – величина сдвига. При этом $b{+}1 = (a{+}1){+}s$ и $b{+}2 = (a{+}2){+}s$. Поскольку числа $b$, $b{+}1$, $b{+}2$ делятся, соответственно на $a$, $a{+}1$ и $a{+}2$, то сдвиг $s$ должен быть кратен $a$, $a{+}1$ и $a{+}2$. Поэтому наименьший возможный сдвиг, это $s =$НОК$(a, a + 1, a + 2)$. Поэтому все искомые числа имеют вид: $b = a + k\text{НОК}(a, a+1, a+2)$, $b+1 = (a+1) + k\text{НОК}(a, a+1, a+2)$, $b{+}2 = (a{+}2) + k\text{НОК}(a, a{+}1, a{+}2)$, где $k$ – произвольное натуральное число.

- Рассмотрим прямоугольный треугольник, который образован точкой наблюдателя, основанием башни и верхней её точкой. Тогда отношение высоты башни $H$ к расстоянию $L$ от ее основания до наблюдателя составляет тангенс угла, под которым Петя видит вершину башни.

  $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{L}.$$

  Получаем, что

  $$H = L\operatorname{tg}\alpha.$$

  Сравним предполагаемое значение высоты башни $h = 558$ метров с действительным $H = L\operatorname{tg}\alpha = 540\ \operatorname{tg}46^\circ$:

  $$H - h = 540\ \operatorname{tg}46^\circ - 558.$$

  Проверим знак полученного выражения.

  Чтобы приближенно вычислить

  $$\operatorname{tg}46^\circ = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right),$$

  рассмотрим более общую задачу о приближенном вычислении

  $$\operatorname{tg}(x_0 + \varepsilon),$$

  где $\varepsilon$ – малое положительное число, а значения тригонометрических функций в точке $x_0$ хорошо известны. Для этого фрагмент графика функции $y = \operatorname{tg}x$ на отрезке $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ приближенно заменим фрагментом касательной к графику в точке $x_0$. Тогда $\operatorname{tg}(x_0 + \varepsilon)$ будет приближенно равно ординате точки с абсциссой $x_0 + \varepsilon$ на касательной. Поскольку уравнение касательной в точке $x_0$ к графику тангенса имеет вид

  $$y = \operatorname{tg}x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0}(x - x_0),$$

  получим

  $$\operatorname{tg}(x_0 + \varepsilon) \approx \operatorname{tg}x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0}((x_0 + \varepsilon) - x_0) = \operatorname{tg}x_0 + \frac{\varepsilon}{\cos^2 x_0}.$$

  Тогда

  $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{\pi/180}{\cos^2(\pi/4)} = 1 + 2\frac{\pi}{180} = 1 + \frac{\pi}{90}.$$

  В такм случае,

  $$H - h = 540\operatorname{tg}46^\circ - 558 \approx 540\Big(1 + \frac{\pi}{90}\Big) - 558 = 6\pi - 18 > 0$$

  и высота башни больше 558 метров.

  Ответ: выше 558 метров.

- Траектория движения мяча, брошенного под углом $\alpha$ из начальной точки $(0,0)$ с начальной скоростью $\vec{v}(v_x, v_y)$, описывается системой уравнений

$$x(t) = v_x t = v\cos(\alpha)t,\ y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_y t = -\frac{gt^2}{2} + v\sin(\alpha)t. \qquad (1)$$

Тогда получаем, что в точке падения

$$18 = v\cos(\alpha)\cdot 3,$$

$$0 = -10\cdot 3^2/2 + v\sin(\alpha)\cdot 3.$$

Откуда

$$v_x = v\cos\alpha = 6,$$

$$v_y = v\sin\alpha = 15,$$

и начальная скорость равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261}.$$

Проверим при каком значении угла, расстояние будет максимальным, т.е. в момент падения мяча $y(t) = 0$ и $x(t) = max$.

Из второго уравнения системы (1) выразим время

$$t = \frac{2v\sin(\alpha)}{g}$$

и подставим в первое

$$x(t) = \frac{2v\cos(\alpha)\cdot v\sin(\alpha)}{g} = \frac{v^2}{g}\sin(2\alpha).$$

Максимальное расстояние $x(t)$ будет при максимальном значении функции синус, то есть $\sin(2\alpha) = 1$. Следовательно, угол равен $\alpha = 45°$.

$$x_{max} = \frac{v^2}{g} = \frac{261}{10} = 26.1\,\text{м}$$

Ответ: 26.1 м.

- Количество теплоты необходимое для изменения температуры тела от температуры $T_0$ до $T_1$ определяется по формуле

$$Q = c\rho V(T_1 - T_0),$$

где $c$ – теплоемкость, $\rho$ – плотность, $V$ – объем, $T_0$ – начальная температура, $T_1$ – конечная температура.

После того, как Катя сделала глоток объёмом $V_k$ и дополнила кружку кипятком такого же объёма $V_k$, то можно записать уравнение баланса

$Q_1 = Q_2$. Итак, количество теплоты для остывания кипятка будет иметь вид

$$Q_1 = c\rho V_k(T_k - T_1)$$

где $T_k$ – температура кипятка, $T_1$ – температура равновесия.

Количества теплоты, которое примет вода, будет иметь вид

$$Q_2 = c\rho(V_0 - V_k)(T_0 - T_1)$$

.

Приравняем $Q_1$, $Q_2$ и выразим температуру $T_1$

$$T_1 = \frac{V_kT_k + (V_0 - V_k)T_0}{V_0}.$$

При повторе процедуры получаем итерационную формулу

$$T_n = \frac{V_kT_k + (V_0 - V_k)T_{n-1}}{V_0},\ n = 1, \ddots, m.$$

Выведем общую формулу для нахождения конечной температуры $T_m$ относительно начальной температуры $T_0$.

Введем обозначения

$$a = \frac{V_kT_k}{V_0},\ b = \frac{V_0 - V_k}{V_0},$$

тогда

$$T_n = a + b \cdot T_{n-1}.$$

Выразим $T_1$ через $T_0$:

$$T_1 = a + bT_0,$$

$T_2$ через $T_0$:

$$T_2 = a + bT_1 = a + b(a + bT_0) = a(1 + b) + b^2T_0.$$

Отсюда следует, что формула для $T_m$ через $T_0$ имеет вид

$$T_m = a(1 + b + .. + b^{m-1}) + b^mT_0.$$

Воспользуемся тождеством $1 + b + .. + b^{m-1} = \frac{b^m-1}{b-1}$ и получаем

$$T_m = a\frac{b^m - 1}{b - 1} + b^mT_0.$$

Теперь выразим $m$ из полученной формулы

$$m = \ln\left(\frac{T_m(b-1) + a}{T_0(b-1) + a}\right) / (\ln b).$$

Найдём $m$:

$a = \frac{10\cdot 100}{400} = 2.5,\ b = \frac{400-10}{400} = \frac{39}{40}$, тогда

$$m = \ln\left(\frac{60(\frac{39}{40}-1)+2.5}{20(\frac{39}{40}-1)+2.5}\right) / \left(\ln\frac{39}{40}\right)$$

$$m = \ln\left(\frac{100-60}{100-20}\right) / \left(\ln\frac{39}{40}\right) = \frac{\ln(1/2)}{\ln\frac{39}{40}}.$$

Запишем уравнение касательной к функции $\ln(1-x)$ в точке $x_0 = 0$. $y = \ln(1-x_0) + \frac{-1}{1-x_0}(x-x_0) = |x_0 = 0| = \ln(1) - x = -x$. Тогда $\ln\frac{39}{40} = \ln\left(1-\frac{1}{40}\right) \approx -\frac{1}{40}$. Тогда $m = -40\ln(1/2) = 40\ln(2)$. Используем значение $ln(2) \approx 0.69$, тогда прямыми вычислениями получаем $m = 40 \cdot 0.69 = 27.6$. Возьмем целую часть числа $m = 27$. Таким образом, получаем, что 27 итераций потребуется, что составит 270 мл жидкости.

Ответ: 270 мл.

- Рассмотрим систему сил действующую на шарики после того, как они отклонились на $45°$.

  Введем систему координат с центром в одном из шариков. Тогда получаем систему уравнений

$$-T\cos(\alpha) = mg \tag{2}$$

$$-T\sin(\alpha) = F_{\text{эл.}}, \tag{3}$$

где $T$ – сила натяжения нити, $\alpha$ – угол отклонения, $F_{\text{эл.}}$ – сила электрического взаимодействия. Выразим $T$ из (2) и подставим в (3). Получим уравнение

$$mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = F_{\text{эл.}} \tag{4}$$

Сила электрического взаимодействия подчиняется закону Кулона

$$F_{\text{эл.}} = k\frac{q^2}{r^2}.$$

Расстояние между двумя зарядами составляет $2l^2$. Выразим массу и подставим закон Кулона в формулу (4)

$$m = \frac{kq^2}{2l^2 g \operatorname{tg}\alpha}$$

Подставим заданные значения

$$m = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 40^2 \cdot (10^{-9})^2}{2\cdot(0,3)^2\cdot 10\cdot \operatorname{tg}(45°)} = 24 \text{ мкг}$$

Ответ: 24 мкг.

- Пусть в каждой книге число листов $N$ много больше единицы. Листы располагаются параллельно друг другу. Тогда относительно среднего листа $N/2$ листов для каждой книги. Угол $\alpha$ – это угол между крайними листами и средними. Тогда в силу малости углов используем приближение
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N/2d}{L/2} \approx \frac{N \cdot d}{L}.$$
После приложения растягивающей силы $F$ на каждый лист действует сила $F/N$. Таким образом, внешние листы прижаты к средним листам силами $\alpha F/N$. Все средние листы сжаты наиболее сильно внешними листами.
$$F_{\text{сред}} = \sum_{n=1}^{N/2} \frac{2n}{N} \cdot \frac{\alpha F}{N} = \frac{\alpha F}{4}$$
Для того, чтобы вытащить сжатый с двух сторон лист, необходимо вдоль листа приложить силу, равную сумме модулей сил, домноженных на коэффициент трения:
$$\frac{\alpha F\mu}{N} \sum_{n=1}^{N/2} \left( 2 \cdot 2 \sum_{i=n}^{N/2} \frac{2i}{N} \right) = \frac{\alpha F\mu 8d}{L} \sum_{n=1}^{N/2} \left( \sum_{i=n}^{N/2} i \right) = \alpha F \frac{d}{3L} N^2 > F.$$
Тогда получаем
$$\alpha \frac{d}{3L} N^2 > 1.$$
Откуда находим
$$N > \sqrt{\frac{3L}{\mu d}}.$$
Для условий задачи получаем
$$N > \sqrt{\frac{3150}{0.30.1}} \approx 122.47,$$
т. е. минимальное количество листов $N = 123$.
Ответ: $\sqrt{\frac{3L}{\mu d}}$.