

**КамГУ им. Витуса Беринга**  
**Олимпиада по информатике**

**Задача №1**

Значение арифметического выражения  $49^{12} - 7^{10} + 7^8 - 49$  записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр «6» содержится в этой записи? Подробно распишите решение.

*Критерии оценивания*

Критерий	Балл
Решение подробно расписано, получен верный результат	10 баллов
В решении допущены отдельные неточности (1-2), приводящие к неправильному результату, алгоритм решения правильный	5 баллов
По решению видно, что ученик правильно представляет ход решения задачи, однако допущено большое количество неточностей (3 и более), получен неверный результат	2 балла
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

*Решение*

Распишем арифметическое выражение с помощью степеней 7

$$7^{24} + 7^8 - 7^{10} - 7^2$$

Рассмотрим запись  $A=7^{24}+7^8$  в 7й системе счисления:  $100..0100..0_7$

разряд	24	23	...	8	7	...	0
A	1	0	...	1	0	...	0

Рассмотрим запись  $B=7^{10}$  в 7й системе счисления:  $100..0_7$

разряд	10	9	8	...	1	0
B	1	0	0	...	0	0

Рассмотрим запись  $C=A-B$  в 7й системе счисления:  $66..6010..0_7$

разряд		24	23	22	...	10	9	8	7	...	0
A		1	0	0	...	0	0	1	0	...	0
B	-					1	0	0	0	...	0
C	=		6	6	...	6	0	1	0	...	0

В 10м разряде невозможно 0-1, поэтому занимаем 1 у 24го разряда, равного 1 (остается 0), 10-1 в 7й системе счисления равно 6.

Рассмотрим запись  $C-7^2$  в 7й системе счисления:

$$7^2=100_7$$

разряд		23	...	10	9	8	7	...	2	1	0
C		6	...	6	0	1	0	...	0	0	0
$7^2$	-								1	0	0
ИТОГО	=	6	...	6	0	0	6	...	6	0	0

**Ответ: 20 «6».**

## Задача №2

Сколько различных решений имеет система логических уравнений

$$(x_1 \wedge y_1) \equiv (\neg x_2 \vee \neg y_2)$$

$$(x_2 \wedge y_2) \equiv (\neg x_3 \vee \neg y_3)$$

...

$$(x_7 \wedge y_7) \equiv (\neg x_8 \vee \neg y_8)$$

где  $x_1, \dots, x_8, y_1, \dots, y_8$ , – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. Подробно распишите решение.

### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Решение подробно расписано, получен верный результат	15 баллов
В решении допущены отдельные неточности (1-2), приводящие к неправильному результату, алгоритм решения правильный	7 баллов
По решению видно, что ученик правильно представляет ход решения задачи, однако допущено большое количество неточностей (3 и более), получен неверный результат	3 балла
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

### Решение

I. Перепишем систему в виде

$$\overline{x_1 \wedge y_1} \equiv \overline{x_2 \wedge y_2} \quad y_1 \equiv \overline{y_2}$$

$$\overline{x_2 \wedge y_2} \equiv \overline{x_3 \wedge y_3} \quad \Rightarrow \quad y_2 \equiv \overline{y_3}$$

$$\dots \quad \dots$$

$$\overline{x_7 \wedge y_7} \equiv \overline{x_8 \wedge y_8} \quad y_7 \equiv \overline{y_8}$$

Пусть  $Z_1 = 0 \Rightarrow Z_2 = 1 \Rightarrow Z_3 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow Z_7 = 0 \Rightarrow Z_8 = 1$  (1,0,1,0,1,0,1,0)

Пусть  $Z_1 = 1 \Rightarrow Z_2 = 0 \Rightarrow Z_3 = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow Z_7 = 1 \Rightarrow Z_8 = 0$  (0,1,0,1,0,1,0,1)

II. У системы, зависящей от  $Z_i$ , 2 решения.

Т.к.  $Z_i = x_i \wedge y_i$ , то для  $Z_i=0$  – 3 решения, зависящих от  $x_i, y_i$ , для  $Z_i=1$  – 1 решение, зависящее от  $x_i, y_i$ .

III. Для (1,0,1,0,1,0,1,0) – 81 решение, для (0,1,0,1,0,1,0,1) – 81 решение

**Ответ: 81+81=162.**

### **Задача №3**

Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах  $v$  и  $w$  обозначают цепочки цифр.

**заменить ( $v, w$ )**

**нашлось ( $v$ )**

Дана программа для исполнителя Редактор:

**НАЧАЛО**

**ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)**

**ЕСЛИ нашлось (2222)**

**ТО заменить (2222, 6)**

**ИНАЧЕ заменить (666, 2)**

**КОНЕЦ ЕСЛИ**

**КОНЕЦ ПОКА**

**КОНЕЦ**

Какая строка получится в результате применения приведённой ниже программы к строке, состоящей из 79 идущих подряд цифр 6? В ответе запишите полученную строку.

#### *Критерии оценивания*

<b>Критерий</b>	<b>Балл</b>
Получен верный результат	10 баллов
Получен неверный результат	0 баллов

#### *Решение*

Начальная строка	666..6 (79 «6»)
<b>ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)</b>	ДА
<b>ЕСЛИ нашлось (2222)</b> <b>ТО заменить (2222, 6)</b> <b>ИНАЧЕ заменить (666, 2)</b> <b>КОНЕЦ ЕСЛИ</b>	266..6 (76 «6», 1 «2»)
Блок ПОКА... ИНАЧЕ... повторяется еще 3 раза	222266..6 (67 «6», 4 «2»)
<b>ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)</b>	ДА
<b>ЕСЛИ нашлось (2222)</b> <b>ТО заменить (2222, 6)</b> <b>ИНАЧЕ заменить (666, 2)</b> <b>КОНЕЦ ЕСЛИ</b>	66..6 (68 «6»)
<b>ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)</b>	ДА
<b>ЕСЛИ нашлось (2222)</b> <b>ТО заменить (2222, 6)</b> <b>ИНАЧЕ заменить (666, 2)</b> <b>КОНЕЦ ЕСЛИ</b>	266..6 (65 «6», 1 «2»)

Блок ПОКА... ИНАЧЕ... повторяется еще 3 раза	222266..6 (56 «6», 4 «2»)
.....	66..6 (13 «6»)
ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)	ДА
ЕСЛИ нашлось (2222) ТО заменить (2222, 6) <b>ИНАЧЕ</b> заменить (666, 2) КОНЕЦ ЕСЛИ	266..6 (10 «6», 1 «2»)
Блок ПОКА... ИНАЧЕ... повторяется еще 3 раза	22226
ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)	ДА
<b>ЕСЛИ</b> нашлось (2222) ТО заменить (2222, 6) ИНАЧЕ заменить (666, 2) КОНЕЦ ЕСЛИ	66
ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)	НЕТ

**Ответ: 66.**

### Задача №4

Дан фрагмент электронной таблицы:

	А	В	С
1	20	???	35
2	=C1-2*В1*В1	=(В1*В1*В1-4)/А1	=C1-8*В1



Какое целое число должно быть записано в ячейке В1, чтобы построенная после выполнения вычислений диаграмма по значениям диапазона ячеек А2:С2 соответствовала рисунку? Известно, что все значения диапазона, по которым построена диаграмма, имеют один и тот же знак.

#### *Критерии оценивания*

Критерий	Балл
Решение подробно расписано, получен верный результат	5 баллов
В решении допущены отдельные неточности, приводящие к неправильному результату, алгоритм решения правильный	2 баллов
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

#### *Решение*

	А	В	С
1	20	$x$	35
2	=C1-2*В1*В1	=(В1*В1*В1-4)/А1	=C1-8*В1

Заменим значение ячейки В1 на  $x$ , тогда

$$A2=35-2x^2$$

$$B2=(x^3-4)/20$$

$$C2=35-8x.$$

По диаграмме видно, что круг разбит на 3 равных части. Следовательно

$$A2=B2=C2$$

$$35-2x^2 = \frac{x^3-4}{20} = 35-8x$$

$$35-2x^2 = 35-8x$$

$$x = 4$$

Проверим

$$35-2x^2 = 3$$

$$\frac{x^3-4}{20} = 3$$

$$35-8x = 3$$

**Ответ: 4.**

### Задача №5

Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$((x \& 46 = 0) \vee (x \& 18 = 0)) \rightarrow ((x \& 115 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )? Распишите решение.

#### Критерии оценивания

Критерий	Балл
Решение подробно расписано, получен верный результат	15 баллов
В решении допущены отдельные неточности (до 2), приводящие к неправильному результату, алгоритм решения правильный	7 баллов
По решению видно, что ученик правильно представляет ход решения задачи, однако допущено большое количество неточностей (3 и более), получен неверный результат	3 балла
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

#### Решение

Введем обозначения  $X_{46} = (x \& 46 = 0)$ ;  $X_{18} = (x \& 18 = 0)$ ;  $X_{115} = (x \& 115 = 0)$ ;  $X_A = (x \& A = 0)$ , получим

$$(X_{46} + X_{18}) \rightarrow (\overline{X_{115}} \rightarrow X_A) = \overline{X_{46}} \cdot \overline{X_{18}} + X_{115} + X_A = 1$$

$A$  имеет значение, когда  $X_{46} = 1 \wedge X_{115} = 0 \vee X_{18} = 1 \wedge X_{115} = 0$ .

Переведем все числа в двоичную систему счисления

$$46 \rightarrow 0101110_2,$$

$$18 \rightarrow 0010010_2,$$

$$115 \rightarrow 1110011_2$$

$$X_{46} = 1, \text{ когда } *0*000*$$

$$X_{18} = 1, \text{ когда } **0**0*$$

$$X_{115} = 0, \text{ когда } \begin{bmatrix} 1***** \\ *1***** \\ **1***** \\ *****1* \\ *****1 \end{bmatrix}$$

$X_{46} = 1 \wedge X_{115} = 0$  - это числа,

$$\begin{bmatrix} 10*000* \\ *01000* \\ *0*0001 \end{bmatrix},$$

т.е. в  $A$  «0» должны стоять в 6,4,0 разрядах (т.к. там могут появиться «1»), а в остальных разрядах любые числа

$X_{18} = 1 \wedge X_{115} = 0$  - это числа,

$\left[ \begin{array}{l} 1*0**0* \\ *10**0* \\ **0**01 \end{array} \right.$

т.е. d A «0» должны стоять в 6,5,0 разрядах (т.к. там могут появиться «1») и во 3,2 (т.к. там может быть что угодно), а в остальных разрядах любые числа.

Объединив два условия для A получим

6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	*	0

Наибольшим числом будет 10, т.е. 2

**Ответ: 2.**

### **Задача №6**

Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$  истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ .

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

Распишите решение.

#### *Критерии оценивания*

Критерий	Балл
Решение подробно расписано, получен верный результат	10 баллов
В решении допущены отдельные неточности (до 2), приводящие к неправильному результату, алгоритм решения правильный	5 баллов
По решению видно, что ученик правильно представляет ход решения задачи, однако допущено большое количество неточностей (3 и более), получен неверный результат	2 балла
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

#### *Решение*

Введем обозначения  $A = (x \in A)$ ,  $P = (x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$ ,  $Q = (x \in \{3, 6, 9, 12, 15\})$ , получим

$$P \rightarrow (Q \cdot \bar{A} \rightarrow \bar{P}) = \bar{P} + \overline{Q \cdot \bar{A}} + \bar{P} = \bar{P} + \bar{Q} + A = \overline{P \cdot Q} + A$$

Следовательно, объединение множеств  $\overline{P \cdot Q}$ ,  $A$  должно покрывать все натуральные числа.

Определим множество  $P \cdot Q$ , это пересечение  $P$  и  $Q$ , т.е.  $\{6, 12\}$ , следовательно  $\overline{P \cdot Q}$ , все числа кроме 6 и 12, значит минимальное  $A$  – это  $\{6, 12\}$ . Сумма равна 18.

**Ответ: 18.**



### Задача №7

Показать, что любую сумму, большую 7 копеек, можно выплатить, используя только 3-х и 5-ти копеечные монеты, при этом использовать максимально возможное количество 3-х копеечных монет.

1) До 20 баллов.

Написать программу, решающую данную задачу.

2) До 7 баллов.

Описать алгоритм решения задачи.

*Формат входных данных*

На вход программа получает  $N$  ( $7 < N \leq 100000$ ).

*Формат выходных данных*

Программа должна вывести 2 числа: количество монет по 3 коп. и количество монет по 5 коп.

*Пример*

Вход	Выход
12	4 0
22	4 2

### *Критерий оценивания*

Критерий	Балл
Написан код программы, правильно работающий в обоих случаях. Допускается наличие 1-3 синтаксических ошибок, не искажающих смысл решения (неправильное название функции, отсутствие «;» и т.д.)	20 баллов
Допущено 4 и более синтаксических ошибок в решении на 20 баллов	10 баллов
Представлен верный алгоритм решения задачи. Программа не написана или написана неверно	7 баллов
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

### *Решение*

Для решения этой задачи можно разделить число нацело  $N$  на 3 и рассмотреть остаток от деления. Существует три варианта: если остаток 0, то сумма выплачивается трехкопеечными монетами; если остаток 1 (наименьшее такое число 10), то необходимо убрать 3 монеты по 3 копейки и добавить 2 монеты по 5 копеек; если остаток от деления 2, то необходимо убрать 1 трёхкопеечную монету и добавить 1 монету достоинством 5 копеек.

### *Пример программы на языке C++*

```
int main(int argc, char** argv) {  
    int N;  
    cin >> N;  
    int x = N/3;  
    int y = 0;
```

```
switch(N%3){
    case 1: x-=3;
           y+=2;
           break;
    case 2: x--;
           y++;
}
cout << x << " " << y;
return 0;
}
```

### Задача №8

Число вводится своим двоичным представлением. Необходимо определить делится ли число на 15.

1) До 25 баллов.

Напишите программу, решающую заданную задачу.

2) До 10 баллов.

Описать алгоритм решения задачи.

*Формат входных данных*

Входные данные содержат двоичное представление числа, длина числа не превышает 10000 двоичных разрядов

*Формат выходных данных*

Программа должна вывести ответ на поставленный вопрос: YES или NO

*Пример*

Вход	Выход
1111	YES
10000011111	NO

### *Критерий оценивания*

Критерий	Балл
Написан правильно работающий код программы. Допускается наличие 1-3 синтаксических ошибок, не искажающих смысл решения (неправильное название функции, отсутствие «;» и т.д.)	25 баллов
Допущено 4 и более синтаксических ошибок в решении на 20 баллов	15 баллов
Представлен верный алгоритм решения задачи либо написана программа по неоптимальному алгоритму	10 баллов
Представлен верный алгоритм решения задачи с некоторыми неточностями	5 баллов
Верно представлен неоптимальный алгоритм	3 балла
Ученик не правильно подошел к решению задачи	0 баллов

### *Решение*

#### Неоптимальное

Возможно ученик переведет число из двоичной системы счисления в десятичную и проверит делимость на 15. Однако данный алгоритм будет работать не для всех входных данных (слишком большое значение может применять переведенное число)

#### Оптимальное

Распишем число в виде многочлена

$$S = a[n] \cdot 16^n + a[n-1] \cdot 16^{(n-1)} + \dots + a[1] \cdot 16 + a[0].$$

$$S \bmod 15 = (a[n] \cdot (16^n - 1) + a[n] + a[n-1] \cdot (16^{(n-1)} - 1) + a[n-1] + \dots + a[1] \cdot (16 - 1) + a[1] + a[0]) \bmod 15$$

А так как  $16^k - 1$  делится на 15 нацело, то и

$$S \bmod 15 = (a[n] + \dots + a[1] + a[0]) \bmod 15,$$

Разбиваем двоичное число справа налево на тетрады, которые однозначно можно преобразовать в шестнадцатеричные цифры, находим их сумму и делим ее на 15. Если остаток 0, то введенное число делится на 15, иначе - нет.

*Пример программы на языке C++*

```
int main(int argc, char** argv) {
    string HEX="0000*0001*0010*0011*0100*
0101*0110*0111*1000*1001*1010*
1011*1100*1101*1110*1111*";
    string number;
    cin >> number;
    int sum = 0;
    while (number.length()>=4){
        string tetr=number.substr(number.length()-4,4);
        sum+=HEX.find(tetr+"*")/5;
        number.erase(number.length()-4,4);
    }
    if ( number.length() ){
        string add = "";
        add.append("0000",4- number.length());
        number = add + number;
        sum+=HEX.find(number+"*")/5;
    }
    if (!(sum%15))
        cout << "YES";
    else
        cout << "NO";
    return 0;
}
```

*Таблица баллов*

Задача	Максимальный балл
<b>1</b>	10
<b>2</b>	15
<b>3</b>	10
<b>4</b>	5
<b>5</b>	15
<b>6</b>	10
<b>7</b>	20
<b>8</b>	25
<b>ИТОГО</b>	110