Решения заданий олимпиады по математике
Витус Беринг – 2016

Кафедра математики и физики

2 апреля 2016 года 10.00-13.00

1. Дана последовательность $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... , в которой $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ для всякого n = 1, 2, ... Найти наибольший общий делитель чисел a_{100} и a_{99}. (10 баллов)

Решение.

Так как $a_{100} = a_{99} + a_{98}$, тогда, применяя алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя, имеем

$m = a_{100}$

$n = a_{99}$

Остаток от деления $r = m/n = a_{98}$

Далее

$m = a_{99}$

$n = a_{98}$

Остаток от деления $r = a_{97}$

и так далее,

$m = a_2 = 1$

$n = a_1 = 1$

Тогда $r = 0$, алгоритм Евклида завершается. НОД$(a_{100}, a_{99}) = 1$.

Ответ. 1.

2. В интернет-магазине, имеющем менее 20 моделей смартфонов, число шестидюймовых смартфонов кратно числу пятидюймовых смартфонов, которых в свою очередь, в три раза меньше, чем четырехдюймовых. Если число шестидюймовых смартфонов увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем пятидюймовых. Сколько четырехдюймовых смартфонов в интернет-магазине? (10 баллов)

Решение.

Пусть m_4, m_5, m_6 – число четырех-, пяти- и шестидюймовых телефонов. Из условий составим следующие уравнения и неравенства:

$m_4 + m_5 + m_6 < 20$

$m_6 = s \cdot m_5$

$m_4 = 3m_5$

$2m_6 = m_5 + 14$

Подставим выражения для m_6 и m_4 получил 2 соотношения

$3m_5 + m_5 + s \cdot m_5 < 20$

$2sm_5 = m_5 + 14$

Вынесем m_5 за скобки

$(4 + s)m_5 < 20$

$(2s - 1)m_5 = 14 = 7 \cdot 2$

Так как s и m_5 целые, то из последнего уравнения получаем $m_5 = 2$ и $s = 4$. Оба значения удовлетворяют неравенству $(4 + s)m_5 < 20$

Тогда число четырехдюймовых равно $m_4 = 3 \cdot 2 = 6$

Ответ. 6.

3. Дан многочлен $J(x) = x^2 + x + 2016$. Многочлен $H(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет только три различных действительных корня, при этом многочлен $H(J(x))$ не имеет действительных корней. Доказать, что $H(2016) > \dfrac{1}{64}$. (10 баллов)

Решение.

Так как многочлен $H(x)$ имеет 3 действительных корня, то он представим в виде $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где x_i – действительные числа. Рассмотрим $H(J(x)) = (J(x)-x_1)(J(x)-x_2)(J(x)-x_3)$, которые не имеет действительных корней. Следовательно детерминант каждого сомножителя $J(x) - x_i$ должен быть меньше нуля, в противном случае $H(J(x))$ имеет действительные корни.

Тогда детерминант уравнения $x^2 + x + 2016 - x_i = 0$ имеет вид $D = 1 - 4(2016 - x_i) < 0$. Откуда следует $(2016 - x_i) > \frac{1}{4}$

Тогда $H(2016) = (2016 - x_1)(2016 - x_2)(2016 - x_3) > \frac{1}{64}$

Что требовалось доказать.

4. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$. Найти $\underbrace{f(...f(f(\sqrt[3]{2016})))}_{2016}$. (10 баллов)

Решение.

Рассмотрим $f(f(f(x))) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)^3}}\right)^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-x^3}}}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{\frac{-x^3}{1-x^3}}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{1-x^3}{x^3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}} = x$

Так как 2016 кратно 3, то мы получаем, что $\underbrace{f(...f(f(x)))}_{2016} = x$

То есть $\underbrace{f(...f(f(\sqrt[3]{2016})))}_{2016} = \sqrt[3]{2016}$

Ответ. $\sqrt[3]{2016}$.

5. Найти все простые числа p, q такие, что $p+q = (p-q)^3$. (10 баллов)

Решение.

Выполним замену $p - q = m$, тогда $p = m + q$.

Соотношение $p + q = (p - q)^3$ можно переписать

$2q + m = m^3$

Поделим левую и правую часть на m

$\frac{2q}{m} + 1 = m^2$, где m – целое.

Тогда $\frac{2q}{m}$ – целое, но так как q простое, то либо $m = 1$ либо $m = 2$, либо $m = q$.

При $m = 1$, $2 \cdot q + 1 = 1^2$. $q = 0$, следовательно, не является простым числом.

При $m = 2$, получаем $q + 1 = 2^2$. Откуда $q = 3$, тогда $p = m + q = 2 + 3 = 5$.

При $m = q$, $1 + 2 = q^2$, следовательно q – нецелое.

Ответ. $q = 3, p = 5$.

6. Доказать, что произведение $(n + 1)(n + 2)..(2n - 1)2n$ делится на $n!$ (10 баллов)

Решение.

Представим $(n + 1)(n + 2)..(2n - 1)2n = \frac{(2n)!}{n!}$, следовательно нужно показать, что $\frac{\frac{(2n)!}{n!}}{n!}$.

А это в свою очередь дает $\frac{(2n)!}{n!n!}$, что является числом сочетаний C_{2n}^{n}.

Число сочетаний является некоторым целым t, следовательно

$(n + 1)(n + 2)..(2n - 1)2n = tn!$.

Что требовалось доказать.

7. При каком a система

$$\begin{cases} y = 2 - \sqrt{a^2 - 9 + 6x - x^2} \\ -x^2 + 3x + yx + 3y + 18 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения? (10 баллов)

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы $y = 2 - \sqrt{a^2 - 9 + 6x - x^2}$ и преобразуем его:

$\sqrt{a^2 - 9 + 6x - x^2} = 2 - y$,

$\sqrt{a^2 - (3 - x)^2} = 2 - y$, откуда

$\begin{cases} a^2 - (3 - x)^2 = (2 - y)^2, \\ 2 - y \geq 0. \end{cases}$

Таким образом, получаем уравнение линии

$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = a^2, \\ y \leq 2 \end{cases}$

графиком, которой является нижняя полуокружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом $|a|$.

Рассмотрим второе уравнение $-x^2+3x+yx+3y+18 = 0$ и преобразуем его:

$(x + 3)(-x + y + 6) = 0$.

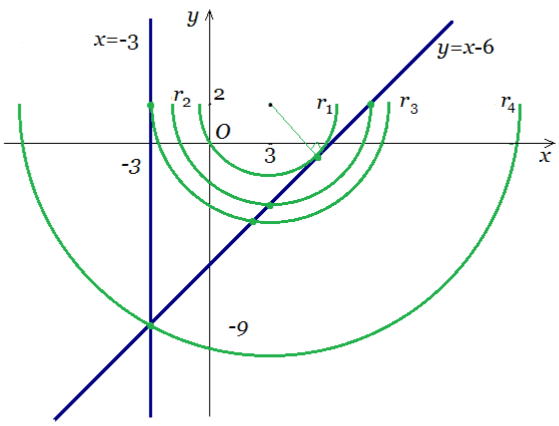

Рис. 1: Рисунок к задаче 7

Таким образом, получаем две прямые с уравнениями $x = -3$, $y = x - 6$.

Изобразим это плоскости "переменная-значение"

Система имеет два решения при $r = |a| \in (a_1; r_2] \cup [r_3; r_4) \cup (r_4; +\infty)$.

Определим значения r_1, r_2, r_3, r_4.

Значение r_1 как катет из равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 5, то есть $r_1 = 5 : \sqrt{2} = 2,5\sqrt{2}$.

$r_2 = 5$, $r_3 = 6$, $r_4 = \sqrt{6^2 + 11^2} = \sqrt{157}$.

Значит, $|a| \in (2,5\sqrt{2}; 5] \cup [6; \sqrt{157}) \cup (\sqrt{157}; +\infty)$, в итоге получаем $a \in (-\infty; -\sqrt{157}) \cup (-\sqrt{157}; -6] \cup [-5; -2,5\sqrt{2}) \cup (2,5\sqrt{2}; 5] \cup [6; \sqrt{157}) \cup$ $\cup\, (\sqrt{157}; +\infty)$.

Ответ. $a \in (-\infty; -\sqrt{157}) \cup (-\sqrt{157}; -6] \cup [-5; -2,5\sqrt{2}) \cup (2,5\sqrt{2}; 5] \cup$ $\cup\, [6; \sqrt{157}) \cup (\sqrt{157}; +\infty)$.